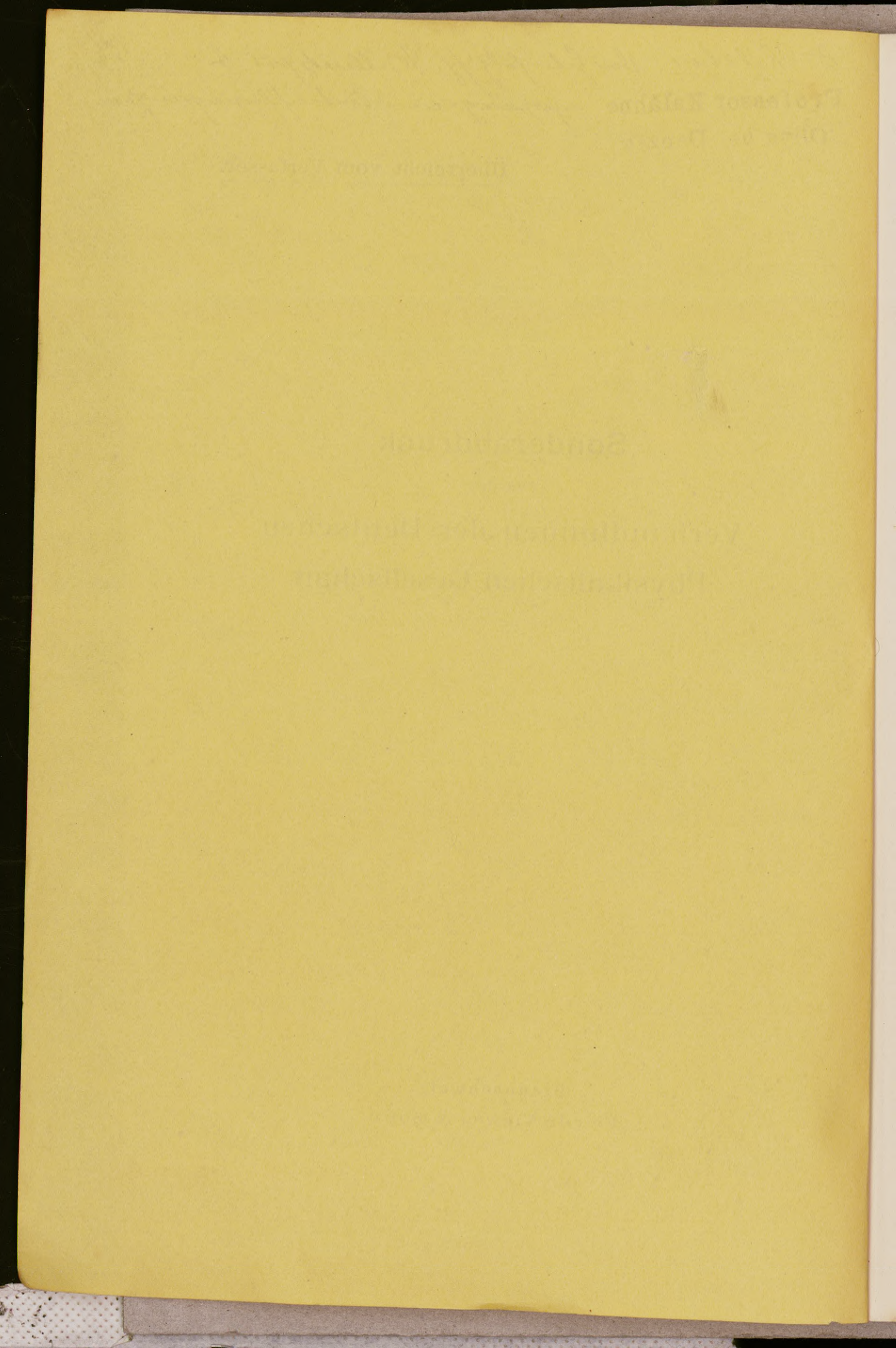
Überreicht vom Verfasser.

Sonderabdruck

aus den

Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft

Braunschweig
Friedr. Vieweg & Sohn



Der Helmholtzsche Wellentypus bei erzwungenen Saitenschwingungen;

von A. Kalähne.

(Eingegangen am 28. Oktober 1914.)

Einleitung.

§ 1. In einer Reihe von Arbeiten, die zum Teil in schwer zugänglichen Zeitschriften erschienen sind, hat kürzlich RAMAN [1]) gewisse Probleme der erzwungenen Saitenschwingungen mit einer im wesentlichen der alten MELDEschen nachgebildeten Versuchsanordnung weiter untersucht. Es handelte sich besonders um die Erregung und Unterhaltung von Schwingungen bestimmter Frequenz durch periodische Kräfte von anderer Frequenz. Dabei wurde auch die sonst meist vernachlässigte und unberücksichtigt gelassene Restbewegung an den Knoten der Saitenschwingung genauer untersucht. Eine der daselbst veröffentlichten photographischen Abbildungen dieser Bewegung veranlaßt mich, auf die Verwandtschaft zwischen dieser Bewegungsform der Saitenschwingungen und der aus der HELMHOLTZschen Theorie folgenden Form der Luftschwingungen in offenen Röhren (Orgelpfeifen) hinzuweisen. Die von RAMAN erhaltene Photographie ist, worauf die folgenden Zeilen aufmerksam machen sollen, eine indirekte Bestätigung der Richtigkeit der HELMHOLTZschen Theorie. Es sei gestattet, dies hier genauer zu erörtern. Zugleich sollen diese Darlegungen, die der Natur der Sache nach zum großen Teil Bekanntes enthalten, dazu dienen, auf gewisse Ungenauigkeiten in der gewöhnlichen, elementaren Vorstellung über die Natur der meisten als stehende Wellen angesehenen Bewegungen hinzuweisen, die besser durch eine der HELMHOLTZschen Schwingungstheorie angepaßte ersetzt werden würde.

Gewöhnlich begnügt man sich bei der Einteilung der verschiedenen ungedämpften Wellenarten mit der Unterscheidung

[1]) C. V. RAMAN, Bull. of the Indian Assoc. for the Cultiv. of Science Nr. 2, 3, 5, 6, 1909—1912; Phys. Rev. **32**, 309, 1911; Phil. Mag. (6) **21**, 615, 1911.

in fortschreitende und stehende Wellen schlechthin und berücksichtigt die Zwischenstufen überhaupt nicht. In Wirklichkeit sind aber gerade diese Zwischenformen die in der Natur vorkommenden Wellenformen; die reinen, d. h. unverändert fortschreitenden Wellen sind ebenso wie die vollkommenen stehenden Wellen ideale Grenzfälle. Von der Dämpfung, die bei wirklichen Schwingungen immer vorhanden ist und die Wellenform noch weiter verändert, werde zunächst ganz abgesehen. Der Grund für die Bevorzugung jener beiden idealen Fälle ist offenbar; es sind die einfachsten typischen Lösungen der linearen Differentialgleichung der Wellenbewegung. Als solche geben sie ein einfaches und übersichtliches Bild der möglichen Bewegungen. Sie reichen in dieser idealisierten Form auch aus, wenn es sich nur um die Darstellung der Erscheinungen im großen und ganzen handelt, oder wenn — z. B. bei stehenden Wellen — nur die Schwingungsfrequenz berechnet werden soll. Sie reichen aber nicht mehr aus, wenn man die Vorgänge im einzelnen genauer verfolgen will, ganz besonders, wenn bei den sogenannten stehenden Wellen doch noch ein gewisser, nicht zu vernachlässigender Energiebetrag dauernd das schwingende System (z. B. die Saite, die schwingende Luftsäule usw.) entlang wandert, um sie — etwa in Form von Strahlung — an den Enden zu verlassen. Gerade diesen Fall hat HELMHOLTZ[1]) in einer seiner bedeutendsten Arbeiten behandelt und ist dabei zu eigentümlichen Ergebnissen über Form und Fortbewegung der Wellen gekommen, die von den üblichen Vorstellungen erheblich abwichen, obwohl sich diese Wellen einfach aus Sinuswellen zusammensetzen, die mit konstanter Geschwindigkeit gleichförmig fortschreiten. Deshalb werde ich, um eine kurze Bezeichnung zu haben, diesen Wellentypus den HELMHOLTZschen nennen.

Wesen des HELMHOLTZschen Wellentypus.

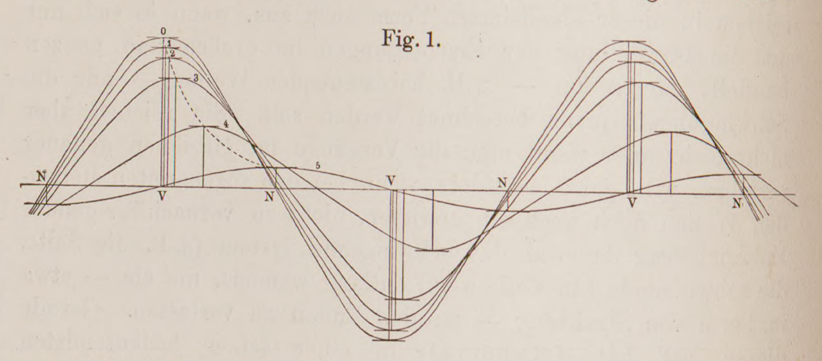
§ 2. Der HELMHOLTZsche Wellentypus besteht aus sinusförmigen fortschreitenden Wellen, die sich von den gewöhnlichen fortschreitenden Wellen dadurch unterscheiden, daß ihre

---

[1]) H. v. HELMHOLTZ, Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden; CRELLES Journ. f. Math. 57, 1, 1860; OSTWALDS Klassiker d. exakt. Wiss. Nr. 80; Wissensch. Abh. I, S. 303.

Gestalt sich beim Fortschreiten periodisch ändert. Anders ausgedrückt: Die Extremwerte der Elongation, d. h. die Wellenberge und -täler, behalten nicht, wie dort, ihre Höhe konstant bei, sondern sie haben ihre Maximalbeträge beim Passieren gewisser Stellen des Raumes, die in Analogie mit der Bezeichnungsweise bei reinen stehenden Schwingungen „Schwingungsbäuche“ genannt werden; flachen sich beim Fortschreiten zu einem Minimalwert ab, mit dem sie an den „Schwingungsknoten“ vorbeieilen, steigen von da bis zum nächsten Bauch wieder an, und so geht das Spiel weiter. Man erhält für diese Art Wellen das Bild, das Brillouin[1]) in einer französischen Darstellung der Helmholtzschen Arbeit auf Grund der Rechnung für einen

Fig. 1.



speziellen Fall gezeichnet hat, und das hier in Fig. 1 wiedergegeben ist. Die Kurven 0, 1, 2, ... 5 stellen die Form der Wellen zu den Zeiten 0, $T/20$, $2\,T/20$, . . . bis $T/4$, also für eine Viertelperiode dar. Um auch das Bild für die Zeiten von $T/4$ bis $T/2$ zu bekommen, muß man sich die Kurven 4, 3, 2, 1, 0 weiter nach rechts verschoben denken, so daß sie symmetrisch zu den ursprünglichen Kurven in bezug auf das Maximum der Kurve 5 liegen. T ist die ganze Schwingungsdauer. Die gewöhnliche Sinuswelle würde man erhalten, wenn man die Kurve 0 unverändert mit konstanter Geschwindigkeit nach rechts verschiebt.

Diese Figur läßt auch sofort eine weitere Eigentümlichkeit der Helmholtzschen Wellen erkennen, daß nämlich die Wellenberge und -täler (Extremwerte) an den Bauchstellen V, d. h. da, wo sie ihre größten Werte erreichen, sehr langsam fortschreiten,

[1]) M. Brillouin, Journ. de phys. (2) 6, 214, 1887.

ja fast stillzustehen scheinen; daß sie dagegen an den Knoten N, wo sie sehr flach sind, außerordentlich schnell vorübereilen. Umgekehrt bewegen sich die Minima, d. h. die Nullwerte der Welle an den Knoten langsam, an den Bäuchen aber schnell.

Der HELMHOLTZsche Wellentypus steht in der Mitte zwischen den unverändert fortschreitenden Wellen und den reinen stehenden Wellen, die in der elementaren Theorie der Pfeifen- und Saitenschwingungen benutzt werden. Er ist der allgemeinere, und wenn man die in den HELMHOLTZschen Schlußformeln durch Verfügung über die Konstanten getroffene Spezialisierung beseitigt, der allgemeinste überhaupt mögliche Typus ungedämpfter ebener Wellen. Zur näheren Erläuterung müssen die HELMHOLTZschen Formeln und ihre Ableitung hier mitgeteilt werden.

Die bekannte Differentialgleichung ebener Wellen, die in der x-Richtung fortschreiten,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (c = \text{Fortpflanzungsgeschwindigkeit}) \qquad 1)$$

geht bei Annahme sinusförmiger Abhängigkeit der Wellenkoordinate φ von der Zeit t, d. h. bei Annahme eines einfachen Tones, durch Abspaltung des Zeitfaktors $\sin kct$ bzw. $\cos kct$ über in die Gleichung der Normalfunktionen des Raumes, in dem die Wellen laufen,

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + k^2 \Psi = 0. \qquad 2)$$

Hier ist Ψ eine Normalfunktion des betrachteten Raumes,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n}{c} = \frac{2\pi N}{c}$$

eine der Schwingungszahl direkt, der Wellenlänge λ umgekehrt proportionale Konstante, N die sekundliche Schwingungszahl (Frequenz), n die zyklische Schwingungszahl (Kreisfrequenz). Die Integration von (2) gibt bekanntlich die Partikularintegrale $\Psi = \sin kx$ und $\Psi = \cos kx$ bzw. das allgemeine Integral $A \sin kx + B \cos kx$ mit den willkürlichen Konstanten A und B. Damit erhält man weiter die allgemeinste Form der Funktion φ

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \Psi^* \cos 2\pi N t + \Psi^{**} \sin 2\pi N t \\ &= (A \sin kx + B \cos kx) \cos 2\pi N t \\ &+ (C \sin kx + D \cos kx) \sin 2\pi N t \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

wobei beliebig statt des Argumentes $2\pi Nt$ auch nt oder kct geschrieben werden kann[1]). Diesen Ausdruck φ benutzt HELMHOLTZ zur Darstellung der Wellenbewegung im Inneren der zylindrischen Röhre, nur wird noch durch passende Wahl des Anfangspunktes der Zeit der Koeffizient C gleich Null gemacht, wodurch die Zahl der zu berechnenden Konstanten sich um eine verringert.

In der HELMHOLTZschen Abhandlung ist φ das Geschwindigkeitspotential, aus dem durch Differentation die Geschwindigkeit

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

der Luftteilchen folgt. Dieselben Gleichungen 1), 2), 3) gelten aber auch, wenn φ irgend eine beliebige der periodisch veränderlichen Größen irgend einer ebenen Wellenbewegung darstellt, z. B. die seitliche Elongation bei einer Transversalwelle.

HELMHOLTZsche Wellen in offenen Gassäulen (Pfeifen).

§ 3. Unter Zugrundelegung gewisser Voraussetzungen — nämlich 1. Rohrlänge groß gegen die Rohrweite, 2. Wellenlänge des in der Röhre erzeugten Tones ebenfalls groß gegen die Rohrweite und die Dimensionen der Rohrmündung — ergibt sich nach HELMHOLTZ, daß Gleichung 3) bzw. die durch Nullsetzen von C daraus hervorgehende einfachere Gleichung

$$\varphi = (A \sin kx + B \cos kx) \cos 2\pi Nt + D \cos kx \sin 2\pi Nt \qquad 3\text{a})$$

mit großer Annäherung denjenigen Bewegungszustand im Rohrinneren darstellt, zu dem im Außenraum eine von der Mündung aus fortschreitende, mit wachsender Entfernung immer mehr in eine Halbkugelwelle übergehende Welle entspricht, wenn man die Konstanten in folgender Weise bestimmt

$$B = -A \operatorname{tg} k\alpha, \qquad D = -\frac{k^2 A Q}{2\pi} = \frac{2\pi A Q}{\lambda^2} \qquad 4)$$

Darin bedeutet Q den Röhrenquerschnitt in dem von der Mündung entfernteren Teile der Röhre, α die „Mündungskorrektion", eine gegen die Wellenlänge λ kleine Länge, deren Wert von der besonderen Form der Röhre abhängt. Diese Korrektion hat die

[1]) HELMHOLTZ hat statt A, C, D die Bezeichnungen $\frac{A}{k}$, $\frac{\mathfrak{A}}{k}$, $\mathfrak{B}$; B ist gleichbezeichnet.

Bedeutung, daß der in der elementaren Pfeifentheorie als an der Mündung liegend angenommene Verdichtungsknoten (Bauch der Verrückung und Geschwindigkeit) scheinbar um die kleine Strecke α nach außen rückt. Die Amplitudenkonstante A bleibt natürlich noch unbestimmt; sie wird erst bestimmt, wenn die Energie der in der Röhre erzeugten Wellenbewegung gegeben ist.

Durch Einsetzen der Werte 4) in 3 a) wird die letztere

$$\varphi = \frac{A}{\cos k\alpha} \sin k(x-\alpha) \cos 2\pi Nt - \frac{AQk^2}{2\pi} \cos kx \sin 2\pi Nt \tag{5}$$

Hieraus ergibt sich die Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ und Verdichtung $s = (\varrho - \bar{\varrho})/\bar{\varrho}$ der Luftteilchen

$$\begin{aligned} \mathfrak{u} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{Ak}{\cos k\alpha} \cos k(x-\alpha) \cos 2\pi Nt \\ &+ \frac{AQk^3}{2\pi} \sin kx \sin 2\pi Nt \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} s = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{Ak}{c\cos k\alpha} \sin k(x-\alpha) \sin 2\pi Nt \\ &+ \frac{AQk^3}{2\pi c} \cos kx \cos 2\pi Nt. \end{aligned} \tag{7}$$

Diese Größen lassen sich in die Helmholtzsche Form bringen:

$$\mathfrak{u} = J\cos(2\pi Nt + \tau) \tag{8}$$

$$s = L\sin(2\pi Nt + \tau'), \tag{9}$$

wenn man setzt

$$J = Ak\sqrt{\frac{\cos^2 k(x-\alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \frac{k^4 Q^2}{4\pi^2}\sin^2 kx}, \tag{10}$$

$$\operatorname{tg}\tau = -\frac{\frac{k^2 Q}{2\pi}\sin kx}{\frac{\cos k(x-\alpha)}{\cos k\alpha}} \tag{11}$$

und

$$L = \frac{Ak}{c}\sqrt{\frac{\sin^2 k(x-\alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \frac{k^4 Q^2 \cos^2 kx}{4\pi^2}}, \tag{12}$$

$$\operatorname{tg}\tau' = \frac{\frac{k^2 Q}{2\pi}\cos kx}{\frac{\sin k(x-\alpha)}{\cos k\alpha}}. \tag{13}$$

Diese Formen von u und s zeigen, daß man die Bewegung als eine Schwingung auffassen kann, deren Amplitude und Phase mit dem Orte variiert. Das ist aber gerade das Kennzeichen einer Bewegungsform, die sich zwischen die unverändert fortschreitende Welle (Phase vom Orte abhängig, Amplitude davon unabhängig) und die reine stehende Welle (Phase vom Orte unabhängig, Amplitude davon abhängig) einordnet. Die BRILLOUINsche Zeichnung läßt erkennen, daß man sie physikalisch als fortschreitende Welle ansehen muß, die während des Fortschreitens periodisch ihre Amplitude, also ihre Gestalt, ändert. Statt dessen kann man sie natürlich auch, mehr mathematisch betrachtet, als Ergebnis der Übereinanderlagerung zweier stehender Wellen oder einer stehenden und einer fortschreitenden oder schließlich zweier gegeneinander fortschreitender Wellen ungleicher Amplitude auffassen. Ein Beispiel für die Zerlegung in zwei stehende Wellen, die man übrigens noch weiter zerlegen kann, bieten die Ausgangsformeln 3) bzw. 3a) und 5) für φ, sowie die daraus abgeleiteten Formeln 6) und 7) für u und s. Um die zweite Zerlegungsart zu erhalten, kann man beispielsweise in 5) das erste Glied durch Auflösung von $\sin k(x-\alpha)$ in zwei zerlegen, von denen man einen Teil des einen mit dem letzten Gliede zu einer fortschreitenden Welle vereinigt, während die übrigen zu einer neuen stehenden Welle zusammengefaßt werden. So erhält man

$$\varphi = \left[\left(A - \frac{AQk^2}{2\pi}\right)\sin kx - A \operatorname{tg} k\alpha \cos kx\right]\cos 2\pi Nt + \frac{AQk^2}{2\pi}\sin(kx - 2\pi Nt). \qquad 14)$$

Diese und die anderen Zerlegungen bieten aber nur vom mathematischen Standpunkte aus Interesse, da die physikalischen Vorgänge durch die Gesamtbewegung und nicht durch einzelne Teile derselben bedingt und bestimmt werden.

Einfluß der Strahlung und Reibung auf die Wellenform in Röhren.

§ 4. Ihre Hauptbedeutung haben die HELMHOLTZschen Resultate in dem Falle erzwungener bzw. unterhaltener Schwingungen, sei es, daß eine von außen kommende Welle die Luft im Rohrinneren in Mitschwingung versetzt oder daß die Schwingungen im

Inneren selbst erzeugt werden, etwa durch periodische Bewegung einer die Röhre an einem Ende abschließenden Platte. Letzteres kann angenähert durch die Schwingungen einer in diese Verschlußplatte eingesetzten Metallzunge wie bei Zungenpfeifen ersetzt werden. Dann hat man eine am Röhrenende erregte erzwungene Schwingung, die sich als Welle durch die Röhre fortpflanzt und am vorderen offenen Ende in die freie Atmosphäre ausstrahlt.

Die Stärke der Ausstrahlung hängt von Gestalt und Größe der Mündung ab. Bei kleiner Öffnung derselben ist sie selbst klein und wird Null, wenn die Öffnung verschwindend klein ist, d. h. wenn die Mündung fest verschlossen wird. Dann bleibt natürlich die ganze Energie dauernd in der Röhre und man hat den Idealfall einer reinen stehenden Welle. Dauernder Energienachschub von der Erregungsstelle her würde in diesem Falle, da keine Strahlungsdämpfung stattfindet, die Schwingungen schließlich unendlich groß werden lassen, wenn nicht noch die von HELMHOLTZ vernachlässigte Reibungsdämpfung vorhanden wäre. Bei Luftschwingungen in engen Röhren ist der Betrag der durch Reibung zerstreuten Energie, die hauptsächlich an die Wände abgegeben wird, gegen den auf Schallstrahlung entfallenden Betrag keineswegs ganz zu vernachlässigen, selbst dann, wenn die Strahlung durch Freilassen der ganzen Röhrenmündung besonders begünstigt, also recht groß gemacht wird. Genaue Untersuchungen über das Verhältnis zwischen Strahlungs- und Reibungsdämpfung in Röhren bzw. Pfeifen sind allerdings nicht vorhanden. Doch folgt die Richtigkeit dieser Behauptung aus einer Beobachtung, die man leicht an jeder Resonanzröhre — offenen Röhre mit verschiebbarem Stempel zur Änderung der Länge der resonierenden Luftsäule — anstellen kann. Dabei zeigt sich nämlich, daß die der Röhrenmündung näheren Tonmaxima und -minima verwaschener sind und die Lage der zugehörigen Knoten und Bäuche in der Röhre weniger scharf zu bestimmen ist, als die der Mündung ferner, dem Stempel also näher liegenden. Das ist nur dadurch zu erklären, daß die in die Röhre eindringenden Wellen auf ihrem Wege bis zum reflektierenden Stempel und zurück gedämpft werden, so daß in der Nähe der Mündung die Amplituden der einfallenden und der reflektierten Welle schon merklich verschieden sind. Der naheliegende Einwand, daß diese Erscheinung durch die natürlich immer etwas vorhandene zeitliche

Dämpfung der einfallenden Welle verursacht und somit die räumliche Dämpfung beim Fortschreiten nur vorgetäuscht werde, ist nicht stichhaltig. Denn dazu ist die zeitliche Dämpfung der praktisch benutzten Tonquellen — Stimmgabeln — selbst bei hohen Tönen, um die es sich dabei handelt, viel zu gering. Wenn diese primäre Dämpfung ausreichen sollte, um Unschärfe der Knoten und Bäuche zu erzeugen, müßte sie so stark sein, daß der Ton bereits in Bruchteilen einer Sekunde völlig verklingen, also zur Erzeugung von hörbaren Interferenzen unbrauchbar sein würde.

Ist sonach die Reibungsdämpfung in engen Luftsäulen zwar merkbar, so überwiegt doch bei nicht zu kleiner Mündung die Strahlungsdämpfung bedeutend, und man erhält angenähert richtige Resultate, wenn man ungedämpfte Fortpflanzung der Wellen in der Röhre annimmt, welche Annahme zu den HELMHOLTZschen Formeln führt. Berücksichtigung der Reibungsdämpfung würde, wenn die Rechnung dann überhaupt ausführbar wäre, viel kompliziertere Formeln ergeben.

Vergleich zwischen Luftschwingungen in offenen Röhren und erzwungenen Saitenschwingungen.

§ 5. Versuche, die Richtigkeit der HELMHOLTZschen Theorie bezüglich der Form und eigentümlichen Fortbewegung der Wellen in Röhren nachzuweisen, sind nicht ausgeführt worden. Deshalb ist es von Interesse, daß, wie eingangs angedeutet, auf einem anderen Gebiete, nämlich bei den erzwungenen Transversalschwingungen von Saiten die gleiche Art des Fortschreitens, die ruckweise Bewegung der Wellenberge und -täler (Maxima) und der Nullwerte (Minima) direkt beobachtet und die Theorie nach dieser Richtung hin geprüft werden kann.

Genau genommen liegen bezüglich der Energieabgabe und der dadurch erzeugten Dämpfung die Verhältnisse bei den erzwungenen Schwingungen von Saiten und ebenso von Stäben (Zungen, Lamellen), denen an einem Ende, etwa durch Anheften an die Zinke einer Stimmgabel, eine sinusförmige Bewegung aufgezwungen wird, gerade entgegengesetzt wie bei offenen Luftsäulen, die an einem Ende erregt werden. Während bei letzteren die Energieabgabe hauptsächlich durch Strahlung am offenen Ende, durch Reibung längs der Röhre nur zu einem kleinen Teil

erfolgt, findet bei jenen die Energiezerstreuung auf ihrer ganzen Länge statt, sowohl durch Strahlung als auch infolge innerer Reibung. Nur ein Bruchteil der insgesamt zerstreuten Energie wandert durch das ganze System hindurch und verläßt es erst am entgegengesetzten Ende. Dieser Bruchteil ist bei Saiten und Stäben mit fest eingespanntem Ende fast immer sehr klein, besonders wenn die Einspannungsvorrichtung hinreichend schwer und stabil ist, um eine merkliche Bewegung des Saitenendes zu verhindern. An der Befestigungsstelle ist dann ein vollkommener Knoten, durch den keine Energie auf den Halter übertragen wird.

Der Versuch ist in der bekannten, von MELDE[1]) angegebenen Form mit einer dünnen Saite, am besten einem Zwirn- oder Seidenfaden, und einer kräftigen elektromagnetischen Stimmgabel leicht ausführbar und dient in dieser Gestalt seit langem als wirksamer Vorlesungsversuch. Die Saite bildet dabei entweder die Verlängerung der einen Stimmgabelzinke oder steht senkrecht auf der Schwingungsebene der Gabel; sie schwingt je nach ihrer Länge und der willkürlich zu regelnden elastischen Spannung in einer oder mehreren Abteilungen, die durch Stellen geringster Bewegung, die „Knoten" voneinander getrennt sind. Diese Knoten sind aber keine Stellen vollkommener Ruhe, wie bei reinen stehenden Schwingungen; sie können das nicht sein, weil sonst keine Energie durch sie hindurch übertragen werden könnte, und die an den Knoten vorhandene Restbewegung ist geradezu ein Maß für die von einer Abteilung auf die nächste übergehende Energie. Wegen der gleichmäßig über die Saitenlänge verteilten Dämpfung nimmt die weiterwandernde Energie allmählich ab, bis sie am Endknoten, wenn dieser vollkommen fest ist, den Wert Null, wenn er nicht ganz fest ist, einen gegen den Anfangswert kleinen Betrag erreicht. Bei den Luftschwingungen in Röhren bleibt dagegen, wie früher dargelegt, der durchwandernde Betrag (annähernd) konstant und tritt erst am Ende aus. Trotzdem ist aber die Bewegung in beiden Fällen, den Saiten- und den Luftschwingungen, einander sehr ähnlich, besonders wenn die Dämpfung der Saite nur klein ist, so daß der Energiestrom durch aufeinanderfolgende Knoten annähernd derselbe ist.

[1]) F. MELDE, Pogg. Ann. **109**, 192, 1859; **111**, 513, 1860; Wied. Ann. **24**, 496, 1885.

Vergleich der Formeln für räumlich gedämpfte, erzwungene Saitenschwingungen mit den Helmholtzschen.

§ 6. Um den Vergleich mit den Helmholtzschen Schwingungen deutlich zu machen, muß die Theorie der erzwungenen Saitenschwingungen kurz skizziert werden. Sie ist im wesentlichen bekannt. Man hat die Differentialgleichung 1) der ungedämpften Saitenschwingungen durch ein Dämpfungsglied auf der rechten Seite zu vervollständigen, was auf verschiedene Weise geschehen kann. Ein derartiger Ansatz stammt von Warburg [1]), ein anderer von Hopkinson [2]); er läßt sich übrigens mit jenem zu einem allgemeineren vereinigen. Der Warburgsche Ansatz berücksichtigt die Strahlungsdämpfung, wobei die dämpfende Kraft proportional der jeweiligen Geschwindigkeit der Saitenteilchen angenommen wird, der Hopkinsonsche die Dämpfung durch innere Reibung unter der speziellen Annahme, daß die dämpfende Kraft der zeitlichen Änderung des „stress", bei Transversalschwingungen der zeitlichen Änderung der Saitenkrümmung proportional ist [3]). Die Differentialgleichungen lauten demnach:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2\varepsilon \frac{\partial y}{\partial t} \quad (\text{Warburg}) \qquad 15)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + k \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2} \right) \quad (\text{Hopkinson}). \qquad 16)$$

Darin bedeuten y die seitliche Ausbiegung, c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen, die durch die Spannung der Saite und die Masse ihrer Längeneinheit bestimmt wird, ε und $c^2 k$ die Dämpfungskonstanten [4]). Außer diesen Ansätzen für die Dämpfung sind natürlich noch andere möglich. Wenn die betreffenden Zusatzglieder linear sind wie die obigen, so ändert sich an der Integration der Gleichung nichts Wesentliches, nur

---

1) E. Warburg, Pogg. Ann. **136**, 89, 1869.

2) J. Hopkinson, Phil. Mag. (4) **45**, 176, 1873.

3) Die Hopkinsonsche Rechnung faßt ursprünglich nur longitudinale Schwingungen ins Auge; sie läßt sich aber mit etwas anderer Deutung der einzelnen Größen auf Transversalschwingungen übertragen.

4) Das Hopkinsonsche k hat natürlich mit dem Helmholtzschen k der Gleichungen 2) bis 13) nichts zu tun.

die dabei auftretenden Koeffizienten erhalten je nach dem besonderen Fall verschiedene Formen und Werte.

Die Integration wird am einfachsten durch Ansatz des Partikularintegrals

$$y = A e^{\lambda x + \mu t} \tag{17}$$

bewirkt, wobei A eine willkürliche Amplitudenkonstante, λ und μ zwei durch die Säkulargleichung (charakteristische Gleichung), die man durch Einsetzen von 17) in die Differentialgleichung erhält, miteinander verbundene, von den Konstanten der Gleichung und den äußeren Bedingungen abhängige feste Konstanten sind. Alle drei können komplex sein; durch nachträgliche Zerspaltung der Lösung in den reellen und maginären Teil erhält man dann schließlich in bekannter Weise die reellen Lösungen.

Wenn das Problem wie gewöhnlich lautet, die erzwungenen Schwingungen einer am einen Ende (bei $x = 0$) starr befestigten, am anderen Ende (bei $x = l$) einer periodischen sinusförmigen Bewegung

$$y = K \sin \varkappa t \quad \text{oder} \quad y = K' \cos \varkappa t$$

unterworfenen Saite zu bestimmen, so ist

$$\mu = i\varkappa = \varkappa\sqrt{-1}$$

zu setzen; λ wird dann komplex, d. h. man erhält eine örtlich gedämpfte, zeitlich ungedämpfte Schwingung. Die vollständige Lösung hat die Form

$$y = \frac{2K}{\operatorname{Cos} 2\delta l - \cos 2\gamma l} \left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{Cos}\delta l \sin\gamma l \operatorname{Sin}\delta x \cos\gamma x \cos\varkappa t \\ +\operatorname{Sin}\delta l \cos\gamma l \operatorname{Cos}\delta x \sin\gamma x \cos\varkappa t \\ +\operatorname{Cos}\delta l \sin\gamma l \operatorname{Cos}\delta x \sin\gamma x \sin\varkappa t \\ +\operatorname{Sin}\delta l \cos\gamma l \operatorname{Sin}\delta x \cos\gamma x \sin\varkappa t \end{array} \right\} \tag{18}$$

wobei gilt [1])

$$\lambda = \delta + i\gamma \quad \text{und} \quad \mu = \pm i\varkappa. \tag{19}$$

Die hierdurch erfüllten Grenzbedingungen sind

$$\left.\begin{array}{llll} \text{für } x = 0 & \text{ist} & y = 0 \\ \;\;\text{„} \;\; x = l & \;\text{„} & y = K\sin\varkappa t \end{array}\right\} \tag{20}$$

---

[1]) $\varkappa$ ist die Kreisfrequenz der erzwungenen Schwingung, γ bestimmt die räumliche Periode (Knotenlage). δ die räumliche Dämpfung; l ist die Saitenlänge, K die Schwingungsamplitude des Saitenendes bei $x = l$.

*

Die Lösung 18) läßt sich auch in die Form bringen[1])

$$y = M \sin(\varkappa t + \tau_w), \tag{21}$$

wenn gesetzt wird

$$\left.\begin{aligned} M &= K \sqrt{\frac{\mathfrak{Cof}\, 2\delta x - \cos 2\gamma x}{\mathfrak{Cof}\, 2\delta l - \cos 2\gamma l}} \\ \operatorname{tg} \tau_w &= - \frac{1 - \mathfrak{Ctg}\, \delta x\, \mathfrak{Tg}\, \delta l \operatorname{tg} \gamma x \operatorname{ctg} \gamma l}{\mathfrak{Ctg}\, \delta x \operatorname{tg} \gamma x + \mathfrak{Tg}\, \delta l \operatorname{ctg} \gamma l} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Die erste Form, 18), entspricht vollkommen der in Gleichung 3) enthaltenen Form der HELMHOLTZschen Lösung, die zweite, 21), der in den Gleichungen 8) bzw. 9) und den folgenden angegebenen. Außer diesen sind natürlich noch andere Formen möglich, z. B. die auch von WARBURG mitgeteilte, bei der die Schwingung in zwei gegeneinanderlaufende, räumlich gedämpfte Wellen aufgelöst erscheint, die sich übereinanderlagern, ebenfalls in Analogie mit der gleichen Zerlegung der ungedämpften Wellen.

Aus den Eigenschaften der Hyperbelfunktionen folgt — was hier nicht näher dargelegt werden soll —, daß für kleine Werte der räumlichen Dämpfung δ der Verlauf der Größen M und τ_w einerseits, L und τ' [vgl. Gleichung 12) und 13)] andererseits, als Funktionen von x betrachtet, qualitativ derselbe ist. Quantitativ sind natürlich Unterschiede vorhanden, und zwar in dem Sinne, daß die Sprunghaftigkeit der Bewegung der HELMHOLTZschen ungedämpften Wellen bei den gedämpften Wellen weniger schroff ausfällt. Immerhin ist sie noch genügend ausgeprägt, um erkennbar zu sein.

Subjektive Beobachtung des HELMHOLTZschen Wellentypus bei Saitenschwingungen.

§ 7. Man kann die Erscheinung leicht subjektiv beobachten, dagegen weniger leicht objektiv photographisch festhalten. Letzteres

---

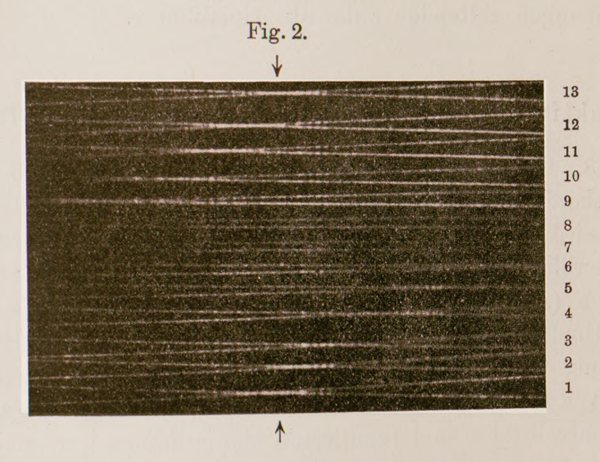
[1]) In den Formeln der WARBURGschen Abhandlung sind einige Druckfehler, die hier verbessert sind. Insbesondere ist in der Formel 3) derselben im Nenner das $+$-Zeichen zwischen die Glieder

$$\operatorname{tg} \gamma x \cdot \frac{e^{\delta x} + e^{-\delta x}}{e^{\delta x} - e^{-\delta x}} \quad \text{und} \quad \frac{e^{\delta l} - e^{-\delta l}}{e^{\delta l} + e^{-\delta l}} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma l}$$

zu setzen. Die Verbindungen $e^{\delta x} + e^{-\delta x}$ usw. sind in der vorliegenden Abhandlung durch die Hyperbelfunktionen $2\,\mathfrak{Cof}\,\delta x$ usw. ersetzt.

ist, worauf eingangs hingewiesen wurde, RAMAN gelungen. Die Versuchsanordnung zum subjektiven Studium benutzt die bekannte stroboskopische Methode. Vor der durch eine elektromagnetische Stimmgabel in kräftiger Schwingung erhaltenen Saite — am besten eignet sich ein Faden gewöhnlicher dünner Nähseide dazu — wird eine stroboskopische Scheibe in gleichmäßige Drehung versetzt. Ist die Zahl der in der Sekunde vorübergehenden Schlitze genau gleich der Schwingungszahl des Fadens, so sieht man die momentane Schwingungsfigur feststehen. Ist die Drehgeschwindigkeit der Scheibe und damit die Zahl der in der Sekunde vorübergehenden Schlitze aber größer oder kleiner, so sieht man in bekannter Weise die aufeinanderfolgenden Phasen der Saitenbewegung. Man erkennt sofort, daß diese Bewegung

Fig. 2.



im wesentlichen die von HELMHOLTZ angegebene Wellenbewegung mit variabler Amplitude und Geschwindigkeit ist. Noch deutlicher sieht man das, wenn man den von RAMAN[1]) benutzten Kunstgriff anwendet, die Scheibe mit doppelter Geschwindigkeit laufen zu lassen, so daß aufeinanderfolgende Schlitze immer entgegengesetzte (bzw. annähernd entgegengesetzte) Bewegungsphasen zeigen. Man erhält also gleichzeitig zwei Kurven im Gesichtsfeld, nämlich die Bilder der um (annähernd) 180° in der Phase verschobenen Schwingungsfigur der Saite. Die beiden Kurven sind die Spiegelbilder voneinander in bezug auf die durch die

[1]) C. V. RAMAN, Phys. Rev. 32, 309, 1911.

Ruhelage der Saite gegebene Achse. Ihre gegenseitigen Schnittpunkte liegen auf dieser und bezeichnen somit die Nullage (vgl. Fig. 2).

Beobachtet man in dieser Weise, so kann man die Wanderung der Wellenmaxima (Berge und Täler) und der Minima (Nullwerte der Saitenelongation) bequem verfolgen und man findet — besonders gut ist das bei der Bewegung der Nullwerte, eben der leicht zu beobachtenden Schnittpunkte jener Kurven, zu sehen — die für den HELMHOLTZschen Wellentypus charakteristische ungleichförmige Geschwindigkeit, wie sie aus der BRILLOUINschen Zeichnung zu entnehmen ist. Man hat hier also, wenigstens indirekt, eine Bestätigung der HELMHOLTZschen Rechnungsergebnisse, da diese, wie gesagt, in ihrer Form mit den für gedämpfte Saitenschwingungen geltenden nahe übereinstimmen.

Objektive Darstellung der Erscheinung nach RAMAN.

§ 8. Damit die Erscheinung deutlich wird, muß der die stroboskopische Scheibe drehende Motor sehr gleichmäßig laufen; sonst wird sie verwischt, ja kann ganz gefälscht werden. Mit den gewöhnlichen Mitteln zur Erzeugung annähernd konstanter Rotation (ich benutzte einen kleinen Elektromotor mit regulierbarer Umdrehungszahl) gelingt es nur immer kurze Zeit, die Erscheinung festzuhalten. Es dürfte kaum möglich sein, einen nicht von der schwingenden Saite selbst in seiner Geschwindigkeit kontrollierten und regulierten Motor dauernd so gleichmäßig rotieren zu lassen, daß man eine Anzahl photographischer Aufnahmen anfertigen kann, die die Bewegung in verschiedenen Phasen darstellen. Denn wenn die Scheibenbewegung nicht genau der Saitenbewegung angepaßt ist, sind die erhaltenen Bilder nicht beweiskräftig. Zur photographischen Aufzeichnung der Erscheinung muß man deshalb besondere Mittel anwenden. RAMAN hat seine Bilder in folgender Weise erhalten. Zur Drehung der Scheibe wurde ein von derselben Stimmgabel, die die Fadenschwingung erzeugt, angetriebener Synchronmotor nach Lord RAYLEIGH benutzt. Da hierbei infolge des vollkommenen Synchronismus einem feststehenden Auge oder photographischen Objektiv immer dieselbe Bewegungsphase der Saite beim Vorübergang der Schlitze

erscheint, so muß man, um die Bewegung zu verfolgen, das Auge (Objektiv) in der Drehrichtung der Scheibe (oder gegen sie) fortbewegen. Einer Verschiebung desselben um den Abstand zweier benachbarter Schlitze entspricht eine Phasenänderung der beobachteten Bewegung um π, also eine Fortbewegung der Welle um eine Halbwellenlänge, wenn die Scheibe sich, wie angenommen, mit der doppelten Geschwindigkeit dreht, so daß während einer Periode der Saitenschwingung zwei Schlitze vorbeigehen. Zu jedem Bruchteil dieser Verschiebung gehört der gleiche Bruchteil der Phasenänderung.

Auf diese Weise von Raman hergestellte Aufnahmen zeigen nun ganz deutlich, daß die Kurvenschnittpunkte, die Nullwerte der Elongation, sich in der Art der Helmholtzschen Wellen bewegen. Fig. 2 ist eine Reproduktion der in der Ramanschen Veröffentlichung [1]) enthaltenen Abbildung einer solchen Aufnahme, die 13 aufeinanderfolgende, um gleiche Zeiten auseinanderliegende Phasen zeigt. Es ist nur die Umgebung eines „Knotens" der Saite dargestellt; die vertikale Mittellinie der Figur entspricht der mittleren, ohne stroboskopische Scheibe gesehenen Lage des „Knotens". Die Figur ist von unten nach oben zu lesen. Wie man sieht, bewegt sich der Schnittpunkt der beiden Kurven zunächst sehr langsam, dann immer schneller und schneller nach rechts von dem „Knoten" fort. Die sechste Phase (sechstes Bild von unten) zeigt ihn schon ganz am rechten Rande der Abbildung. Bei der siebenten Phase, der mittelsten Aufnahme, liegt er weit rechts außerhalb der Bildgrenze, nach der auf direkter Okularbeobachtung fußenden Angabe von Raman gerade um die halbe Länge einer Schwingungsabteilung, d. h. also um eine Viertelwellenlänge vom „Knoten" entfernt an der Stelle eines „Bauches" [2]). Der nächstfolgende Schnittpunkt liegt um ebensoviel nach links. An dem „Knoten", also in der Bildmitte, hat die Saite in dieser Phase gerade ihre maximale Elongation, die,

[1]) C. V. Raman, Experimental Investigations on the Maintenance of Vibrations; Bulletin No. 6, Indian Ass. for the Cultiv. of Science 1912, Tafel II. — In der Phys. Rev. **32**, 309, 1911 ist ebenfalls eine solche, aber weniger gute Figur enthalten.

[2]) Auf der Abbildung laufen in Phase 7 die beiden Kurven fast vollkommen parallel; ihre Schnittpunkte müssen also sehr weit außerhalb der Bildgrenze liegen. Durch Vergleich mit Phase 6 erkennt man, daß die Entfernung vom Bildrande mindestens etwa gleich der Bildbreite sein muß.

wie der Augenschein lehrt, kleiner ist als die Maximalelongationen der übrigen Saitenpunkte, die natürlich zu anderen Zeiten eintreten.

In den folgenden Phasen (8 bis 13), die in der oberen Hälfte der Figur dargestellt sind, rückt der nächste Schnittpunkt von links heran, anfangs schnell, dann, je näher er dem „Knoten“ kommt, um so langsamer werdend, bis er ihn in der 13. Phase erreicht. Mit dieser, die der ersten Phase gleich ist, beginnt dann das Spiel von neuem und wiederholt sich immer in der gleichen Weise.

Danzig-Langfuhr, Technische Hochschule, Juli 1914.

